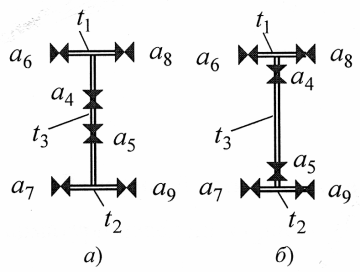


Рис.2

*Выводы*

1. Получены математические модели функциональной надежности несимметричной и симметричной перемычек между двумя трубопроводными линиями – соответственно выражения (5) и (6).

2. Проведен анализ конструкций перемычек с разной длиной средней трубопроводной зоны по критерию функциональной надежности.

1.Ильин Ю.А. Надёжность водопроводных сооружений и оборудования. – М.: Стройиздат, 1985. – 240 с.

2.Самойленко М.І., Кузнецов А.І., Костенко О.Б. Теорія ймовірностей. – Харків: ХНАМГХ, 2008. – 194 с.

*Получено 09.11.2011*

УДК 519

В.П.ПРОТОПОПОВА, Е.С.АРХИПОВА, канд. физ.-мат. наук
*Харьковская национальная академия городского хозяйства*
Ю.И.ДОРОШЕНКО, канд. техн. наук
*Харьковский национальный технический университет «ХПИ»*

# ПРИМЕНЕНИЕ ФРАКТАЛОВ ДЛЯ ЛОКАЛИЗАЦИИ КОРНЕЙ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫХ ПОЛИНОМОВ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СТЕПЕНИ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

Предложен метод, который решает проблему локализации комплексных корней полиномов с комплексными коэффициентами произвольной степени. Фрактальные рисунки областей значений полинома при заданной области изменений комплексного аргумента построены с помощью современного математического пакета “Maple”.

Пропонується метод, який вирішує проблему локалізації комплексних коренів поліномів з комплексними коефіцієнтами довільного степеня. Фрактальні малюнки областей значень полінома при заданій області змін комплексного аргументу побудовано за допомогою сучасного математичного пакету “Maple”.

A method which decides the problem of localization of complex roots of polynomials with the complex coefficients of arbitrary degree is in-process offered. Fractal pictures of areas of values of polynomial at the set area of changes of complex argument built by the modern mathematical package of “Maple”.

*Ключевые слова*: фрактал, корни, полином.

Проблема устойчивости играет важную роль в математике, механике, технике, физике, химии, биологии. Эта проблема исследовалась, начиная со средины прошлого столетия, в связи с ростом мощности и быстроходности паровых машин и их склонностью к неустойчивости [3, 4].

Вопрос об устойчивости линейной стационарной системы сводится к вопросу определения корней характеристического полинома. Для систем высокого порядка решить практически вопрос об устойчивости линейной стационарной системы трудно за обозримое время.

Как известно, вопрос об устойчивости линеаризованной стационарной системы равнозначен отрицательности действительной части корня. Характеристические полиномы, корни которых расположены слева от мнимой оси называются устойчивыми. Положительность всех коэффициентов – это необходимое, но не достаточное условие.

Целью работы является локализация комплексных корней полиномов произвольной степени. Используя фрактальные рисунки (в системе “MAPLE”) значений функций в некоторой заданной области, получены картины расположения корней полиномов, в виде так называемых точек сгущения (притяжения) (рис.1) [1, 2].

Решение задачи нахождения нулей функции, как правило, проводят в два этапа. На первом этапе исследуют поведение функции, в результате чего отделяют (локализуют) участки, на каждом из которых находится один корень (с учетом его кратности). На втором этапе решения рассматривают конкретный локальный участок (интервал), содержащий один нуль функции, после чего находят этот нуль, применяя тот или иной подходящий метод. Для комплекснозначных полиномов задача локализации корней представляет значительные трудности.

Пусть имеем многочлен *n*-й степени: $P_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$

Оценим с помощью критерия $|z_0| \le 1 + \dfrac{A}{A_0}$, где $A = (|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|)$, $a_0 > 0$ область (круг с центром в начале координат и радиусом $R = 1 + \dfrac{A}{a_0}$) расположения корней данного многочлена и в пределах данной области получим фрактальные картины расположения корней.

При локализации конкретного нуля выделяют его мажорантную область, т.е. область на комплексной плоскости, содержащую только один нуль. В мажорантной области, принадлежащей конкретному нулю $z_1$, уточняют его значение с помощью итерационных методов, которые допускают использование комплекснозначных переменных, например, метод хорд или метод Ньютона. Начальное значение при этом берётся как можно ближе к предполагаемой точке корня, что обеспечивает быструю сходимость решения.

В качестве наглядной иллюстрации метода рассмотрены многочлены 3-й и 5-й степеней: $P_3=z^3-i$; $P_4=z^5+i$. На комплексной $z$-плоскости выбрана прямоугольные области размером: *(-2<x<2); (-1.5<y<1.5).*

Корни многочлена 3-й степени (рис.1) ( $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot i$, $z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$, 2i, $z_3=-i$ ) и многочлена 5-й степени (рис.2) ( $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$,

$z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$, $z_3=-i$ $z_1=\cos\frac{3\pi}{10}+i\sin\frac{3\pi}{10}$,

$z_2=-\cos\frac{3\pi}{10}+i\sin\frac{3\pi}{10}$, $z_3=-\cos\frac{\pi}{10}-i\sin\frac{\pi}{10}$,

$z_4=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$, $z_5=\cos\frac{\pi}{10}-i\sin\frac{\pi}{10}$ ) видны на рисунках в виде точек сгущения.

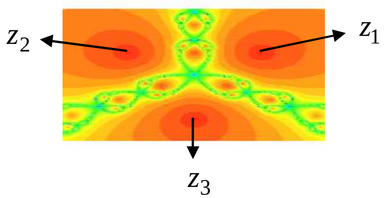


Рис.1 – Фрактальное изображение многочлена $P_3(z)=z^3$-i

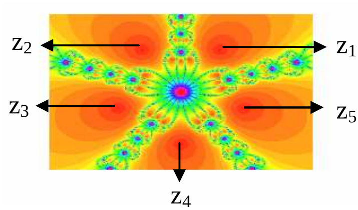


Рис.2 – Фрактальное изображение многочлена $P_5(z)=z^5$-i

Рассмотрим примеры нахождения корней полиномов общего вида степени $n\geq 5$ (рис.3) и фрактальный рисунок полинома при $n$=19 (рис.4).

Учитывая формат рис.3 **[**-3 .. 3, -4 ..4], локализация корней следующая: $Z_1\approx 0.1+0.1*i$; $Z_2\approx 0+1.5\cdot i$; $Z_3\approx 2+1.1\cdot i$; $Z_4\approx -2+1.1\cdot i$; $Z_5\approx 2\cdot i$ и пара кратных корней. После 2 или 3 шагов итераций метода Ньютона с погрешностью e<0,001 получили:

> **$z_1$:=0.1+0.1*i;** ® 0.00032291383 + 0.000573731730 *I*

> **$z_2$:=1.5*i;** ® 1.000315407*I*

> **$z_3$:=2+1.1*i;** ® 1.732457732 + 1.000453353 *I*

> **$z_4$:=-2+1.1*i;** ® *z* := -1.732457732 + 1.000453353 *I*

> **$z_5$:=2*i;** ® 2. *I*

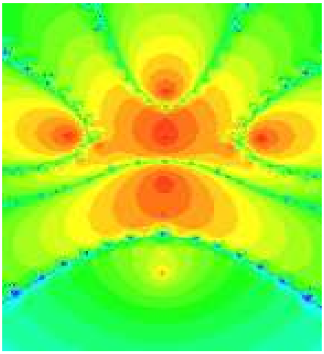

Рис.3 – Фрактальное изображение полинома 7-й степени: $P_7(z) = Z^7 - i\cdot Z^6+4\cdot Z^5-12\cdot i\cdot Z^4-8\cdot Z^3-32\cdot i\cdot Z^2-32\cdot Z$

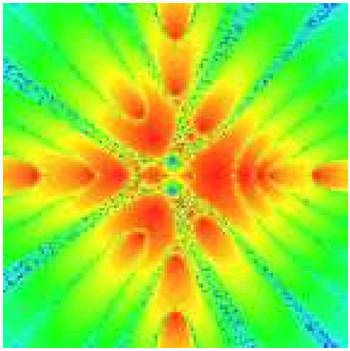

Рис.4. Фрактальное изображение полинома 19-й степени: $P_{19}(z)=(z^3+0.064)\ (z^4-0.1296)\ (z^3-0.027)\ (z^4-1)\ (z^3-0.125)(3z-2)(2z+6)$;

Учитывая формат рис.3 [-3 .. 3, -4 ..4], локализация корней следующая: $Z_1\approx 0.1+0.1*i$; $Z_2\approx 0+1.5\cdot i$; $Z_3\approx 2+1.1\cdot i$; $Z_4\approx -2+1.1\cdot i$; $Z_5\approx 2\cdot i$ и пара кратных корней. После 2 или 3 шагов итераций метода Ньютона с погрешностью e<0,001 получили:

> **$z_1$:=0.1+0.1*i;** ® 0.00032291383 + 0.0005737317730 *I*

> **$z_2$:=1.5*i;** ® 1.000315407 *I*

> **$z_3$:=2+1.1*i;** ® 1.732457732 + 1.000453353 *I*

> **$z_4$:=-2+1.1*i;** ® *z* := -1.732457732 + 1.000453353 *I*

> **$z_5$:=2*i;** ® 2. *I*

Примеры фрактальных рисунков многочленов высоких степеней с заранее известными корнями приведены на рис.5 и рис.6.

С увеличением степени полинома трудно определить области локализации некоторых корней. Здесь можно понижать степень полинома, исключая найденные корни.

Предложенный метод позволяет получить качественную картину расположения корней на комплексной плоскости с последующим их уточнением, что позволит ускорить исследование систем на устойчивость.

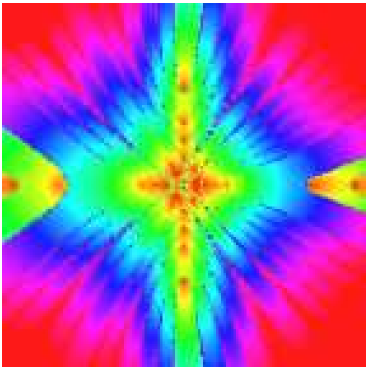

Рис.5 – Фрактальное изображение полинома 31-й степени: $P_{31}(z)=(z^3+0.064)(z^4-0.1296)(z^3-0.027)(z^4-1)(z^3-0.125)(3z-2)(2z+6)(z^2-1)(z^2+2)(z^2-9)(z^2-16)(z+5)(z^2+5)(z+6)$; размер рисунка: [ -7 .. 7, -7 .. 7].

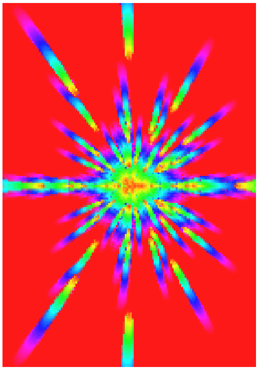

Рис.6 – Фрактальное изображение полинома 70-й степени: $P_{70}(z)=(z^4-1)(z^2-2z+5)(z^8-256)(z^2-2z+7)(z^2-3z+3)(z^3-27)(z^3+64)(z^4-1296)(z^2-5z+10)(3z-2)(z^2+100)(z^3-125)(z^4-2z^2+4)(z^4+1)(z^4+0.0016)(z^4-49)(z^3-0.027)(3z^4+6z^2+4)(27z^3-1)(z^2-4z+5)(z^2-0.36)(z^2+0.81)(5z^2-1)$; размер рисунка: [ -6 .. 6, -10 .. 10].

1.Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов. – Ижевск: НИУ, 2002. – 160 с.

2.Федер Е. Фракталы. .– М.: Мир, 1991. – 254 с.

3.Постников М.М. Устойчивые многочлены. – М.: Наука, 1981. – 176 с.

4.Лопатин М.С., Тульчий В.В., Зеленков Г.А. Исследование робастной устойчивости и неустойчивости по группам вещественных коэффициентов интервального полинома // Труды Института системного анализа РАН «Динамика неоднородных систем». Вып. 39(1). – М.: ЛИБРОКОМ, 2008. – С.133-137.

УДК [519.95+518.5] : 622.692.4

Н.Н.НОВИЦКИЙ, д-р техн. наук
*Институт систем энергетики им. Л.А Мелентьева СО РАН, г.Иркутск*
*(Российская Федерация)*

## О ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СХЕМАХ РАСЧЕТА ПОТОКОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ МЕТОДОМ НЬЮТОНА

В работе на фоне краткой характеристики существующих подходов и методов решения классической задачи установившегося потокораспределения в гидравлических цепях с сосредоточенными параметрами рассматриваются вопросы множественности способов организации вычислительного процесса на базе ньютоновской схемы последовательных приближений.

У роботі на фоні короткої характеристики існуючих підходів і методів розв'язання класичної задачі сталого потокорозподілу в гідравлічних ланцюгах із зосередженими параметрами розглядаються питання множинності способів організації обчислювального процесу на базі ньютонівської схеми після-послідовних наближень.