

УДК 621.311.016

М.В.ХОХЛОВ, канд. техн. наук

Учреждение Российской академии наук Институт социально-экономических и энергетических проблем Севера Коми научного центра УрО РАН, г.Сыктывкар

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ МЕТОДА ВНУТРЕННИХ ТОЧЕК ПРИ ОЦЕНИВАНИИ СОСТОЯНИЯ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПО КРИТЕРИЮ ХЬЮБЕРА

Представлены нелинейный прямо-двойственный алгоритм метода внутренних точек и его вариант типа Меротры для решения задачи оценивания состояния электроэнергетических систем по неквадратичному критерию Хьюбера. Приведены результаты статистических испытаний алгоритмов на системах размерности от 14 до 887 узлов.

Представлено нелінійний прямо-двоїстий алгоритм методу внутрішніх точок і його варіант типу Меротри для вирішення завдання оцінювання стану електроенергетичних систем за неквадратичним критерієм Х'юбера. Наведено результати статистичних випробувань алгоритмів на системах розмірності від 14 до 887 вузлів.

A nonlinear directly-dual algorithm of the interior points method along with the Merotra-type variant of one are presented for solving the problem of estimating the state of electric power systems upon the non-quadratic Huber criterion. The results of statistical testing the algorithms for systems of dimension of 14 to 887 nodes are given.

Ключевые слова: электроэнергетическая система, робастное оценивание состояния, неквадратичный критерий, метод внутренних точек.

Формирование оперативной модели электроэнергетической системы (ЭЭС) предполагает решение задачи оценивания состояния, заключающейся в получении оценок параметров режима ЭЭС путем статистической обработки данных телеметрических измерений, неизбежно содержащих различного рода ошибки. К методам оценивания состояния ЭЭС предъявляются два основных требования. Во-первых, получаемые оценки должны быть робастными, т.е. малочувствительными к нарушению исходных предположений о характере распределения ошибок измерений, например, к появлению больших непредсказуемых ошибок. Во-вторых, алгоритмы вычисления оценок, запускаемые в темпе процесса, должны обладать надежной и быстрой сходимостью.

Один из классов робастных оценок определяется минимизацией критерия Хьюбера [1]:

$$\hat{O}(x) = \sum_{i=1}^m \rho \left(\frac{\bar{y}_i - y_i(x)}{\sigma_i} \right), \quad (1)$$

где x – искомый вектор состояния ЭЭС размерности n ; \bar{y}_i – измеренное значение i -го режимного параметра; $y_i(x)$ – нелинейная функция зависимости измеряемого параметра от переменных вектора состояния; σ_i – среднеквадратичное отклонение ожидаемой ошибки i -го измере-

ния; m – число измерений; ρ – неквадратичная функция Хьюбера:

$$\rho(r) = \begin{cases} r^2 / 2 & \text{при } |r| \leq \gamma, \\ \gamma|r| - \gamma^2 / 2 & \text{при } |r| > \gamma \end{cases} \quad (2)$$

с параметром $\gamma > 0$. Существующие алгоритмы вычисления оценки вектора x , оптимизирующей $\Phi(x)$, основаны на модификации метода Ньютона и используют ту или иную аппроксимацию функции второй производной от $\rho(r)$ [2]. Исследуемые в данной работе алгоритмы исходят из альтернативной формулировки задачи. В [3] показано, что минимуму функции (1) отвечает решение задачи нелинейного программирования:

минимизировать

$$f(x, r, u, v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (r_i - u_i + v_i)^2 + \gamma \sum_{i=1}^m (u_i + v_i) \quad (3)$$

при ограничениях

$$r_i = (\bar{y}_i - y_i(x)) / \sigma_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4)$$

$$(u_i, v_i) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (5)$$

где u_i и v_i – вспомогательные переменные, соответствующие большой положительной и большой отрицательной составляющей ошибки измерения. Целевая функция в новой постановке является выпуклой квадратичной и поэтому обладает лучшими вычислительными свойствами, чем в исходной постановке, где функция $\rho(r)$ имеет линейный характер при $|r| > \gamma$. Для решения задачи (3)-(5) воспользуемся методом внутренних точек [4].

Метод внутренних точек. Решение задачи (3)-(5) удовлетворяет условиям оптимальности первого порядка (уравнениям Куна-Таккера), которые можно записать в виде:

$$F_\mu(w) \equiv \begin{pmatrix} -H(x)^T R^{-1/2} \lambda \\ \gamma - \lambda - \alpha \\ \gamma + \lambda - \beta \\ \lambda + u - v - R^{-1/2}(\bar{y} - y(x)) \\ Au - \mu e \\ Bv - \mu e \end{pmatrix} = 0 \quad (6)$$

с $\mu = 0$, $(u, v, \alpha, \beta) \geq 0$. Здесь λ – вектор двойственных переменных

для ограничений (4); α, β – вектора двойственных переменных, соответствующие ограничениям (5); μ – параметр барьера, e – единичный вектор размерности m , $H(x) = \partial y(x) / \partial x$, $R = \text{diag}(\sigma_i^2)$, $A = \text{diag}(\alpha_i)$; $B = \text{diag}(\beta_i)$, $w = (x, u, v, \lambda, \alpha, \beta)$. Нелинейный метод внутренних точек состоит в том, чтобы из допустимой точки w^k для $\mu^k > 0$ выполнить итерацию методом Ньютона и получить допустимую точку w^{k+1} . Если $\mu^k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, тогда $w^k \rightarrow w^*$, где w^* – искомый вектор переменных.

Алгоритм IP. Задана допустимая начальная точка w^0 , такая, что $(u^0, v^0, \alpha^0, \beta^0) > 0$. Обозначим через d среднюю величину невязок уравнений дополняющей нежесткости $d = (u^T \alpha + v^T \beta) / 2m$.

Шаг 1. Если в текущей точке w^k условия останова выполнены, то в качестве искомой оценки состояния ЭЭС принимается x^k .

Шаг 2. Вычисляется значение барьерного параметра $\mu^k = \delta d^k$, где $\delta \in (0, 1)$ – ожидаемое, но не обязательно реализуемое, уменьшение невязок уравнений дополняющей нежесткости. Обычно принимается $\delta = 0,1$.

Шаг 3. Находится направление $p^k = (p_x^k, p_u^k, p_v^k, p_\lambda^k, p_\alpha^k, p_\beta^k)$ из решения ньютоновской системы уравнений

$$\nabla F(w^k) p^k = -F_\mu(w^k), \quad (7)$$

где вместо матрицы $\nabla F(w^k)$ может использоваться ее модификация.

Шаг 4. Определяется максимальный допустимый шаг t_{\max}^k вдоль направления p^k , при котором $(u, v, \alpha, \beta) > 0$:

$$t_{\max}^k = \min \left\{ 1, \tau \min_i \left\{ \frac{-u_i^k}{p_{u_i}^k} p_{u_i}^k < 0, \frac{-v_i^k}{p_{v_i}^k} p_{v_i}^k < 0, \frac{-\alpha_i^k}{p_{\alpha_i}^k} p_{\alpha_i}^k < 0, \frac{-\beta_i^k}{p_{\beta_i}^k} p_{\beta_i}^k < 0, \right\} \right\}, \quad (8)$$

где $\tau \in (0, 1)$ обычно принимают равным 0,995, и на отрезке $[0, t_{\max}^k]$ вычисляется шаг t^k , обеспечивающий «существенное убывание» неко-

торой функции выигрыша $t^k = \arg \min_{t \in [0, t_{\max}^k]} \phi(w^k + tp^k)$.

Шаг 5. Принимаем $w^{k+1} = w^k + t^k p^k$, $k := k + 1$ и возвращаемся на шаг 1.

Развитием алгоритма IP является алгоритм типа Меротры. В нем выполняется пробный ньютоновский шаг, на основании которого предсказывается уменьшение величины d , и оцениваются ошибки линеаризации уравнений дополняющей нежесткости с целью их коррекции при последующем расчете вектора направления p .

Алгоритм IPM. Задана допустимая начальная точка w^0 , такая, что $(u^0, v^0, \alpha^0, \beta^0) > 0$. Обозначим $\Delta_c = (0_n, 0_m, 0_m, 0_m, \Delta_{\alpha i}^T, \Delta_{\alpha v}^T)^T$, где 0_n – нулевая вектор-строка размерности n , $\Delta_{\alpha i}, \Delta_{\alpha v}$ – векторы ошибок линеаризации уравнений дополняющей нежесткости.

Шаг 1. Если в текущей точке w^k условия останова выполнены, то в качестве искомой оценки состояния ЭЭС принимается x^k .

Шаг 2. Этап прогноза

2.1. Находится аффинно-масштабирующее направление $p_{\text{афф}}^k$ путем решения системы линейных уравнений (7) для $\mu = 0$:

$$\nabla F(w^k) p_{\text{афф}}^k = -F(w^k). \quad (9)$$

2.2. Определяется шаг $t_{\text{афф}}^k$ до границы допустимой области вдоль направления $p_{\text{афф}}^k$ по формуле (8) для $\tau = 1$.

2.3. Оцениваются ошибки линеаризации $\Delta_{\alpha, u_i}^k = t_{\text{афф}}^2 p_{\text{афф}, \alpha}^k p_{\text{афф}, u_i}^k$, $\Delta_{\beta, v_i}^k = t_{\text{афф}}^2 p_{\text{афф}, \beta}^k p_{\text{афф}, v_i}^k$, $i = 1, \dots, m$, и значение параметра μ^k по формуле $\mu^k = (d_{\text{афф}}^{k+1} / d^k)^3 d^k$, где величина $d_{\text{афф}}^{k+1}$ вычисляется в точке $w_{\text{афф}}^{k+1} = w^k + t_{\text{афф}}^k p_{\text{афф}}^k$.

Шаг 3. Этап коррекции

3.1. Решается скорректированная система

$$\nabla F(w^k) p^k = -F_{\mu}(w^k) - \Delta_c^k. \quad (10)$$

Определяется максимальный допустимый шаг t_{\max}^k вдоль направления

p^k по формуле (8) и на отрезке $[0, t_{\max}^k]$ вычисляется шаг t^k , обеспечивающий «существенное убывание» функции выигрыша $\phi(w)$.

Шаг 4. Принимаем $w^{k+1} = w^k + t^k p^k$, $k := k + 1$ и возвращаемся на шаг 1.

Заметим, что при решении систем уравнений (9) и (10) используется одна и та же матрица коэффициентов. Поэтому, наиболее трудоемкую операцию – разложение матрицы на множители – достаточно выполнить лишь на первом этапе. В результате, стоимость одной итерации алгоритма ИРМ по сравнению с алгоритмом ИР увеличивается незначительно.

Поскольку задача (3)-(5) из-за нелинейности уравнений (4) не относится к разряду выпуклых, в изложенных алгоритмах предусматриваются модификация направления поиска, чтобы исключить сходимость к неоптимальным стационарным точкам, и регулировка длины шага с использованием функции выигрыша, чтобы обеспечить глобальную сходимость в широкой области определения переменных.

Рассмотрим систему уравнений (7). Ее решение можно свести к решению системы уравнений размерности $n \times n$. Если взять $\lambda_i^0 = 0$, $\alpha_i^0 = \beta_i^0 = \gamma$, $i = 1, \dots, m$, тогда составляющие вектора направления определяются из системы (11) и выражений (12)-(15):

$$\left(H^T R^{-1} D_1^{-1} H - GR^{-1/2} \lambda \right) p_x = H^T R^{-1/2} \left(D_1^{-1} b_1 - \lambda \right). \quad (11)$$

$$p_\lambda = D_1^{-1} \left(b_1 - R^{-1/2} H p_x \right), \quad (12)$$

$$p_u = A^{-1} \left(\mu - U \alpha + U p_\lambda \right), \quad (13)$$

$$p_v = B^{-1} \left(\mu - V \beta - V p_\lambda \right), \quad (14)$$

$$p_\alpha = -p_\beta = p_\lambda, \quad (15)$$

где $G = \partial^2 y / \partial x^2$, $b_1 = r(x) - \lambda - \mu A^{-1} e + \mu B^{-1} e$, $U = \text{diag}(u_i)$, $V = \text{diag}(v_i)$, $D_1 = I + A^{-1} U + B^{-1} V$, $r(x) = R^{-1/2} (\bar{y} - y(x))$. В стационарных точках матрица коэффициентов $K = H^T R^{-1} D_1^{-1} H - GR^{-1/2} \lambda$ системы (11) совпадает с матрицей Гессе оптимизируемой функции (1). Для минимизирующих точек она положительно определенная, в противном случае она знаконеопределенная. Чтобы обеспечить сходимость итераций к точкам минимума с ограничениями, матрица K в случае ее неопределенности заменяется положительно определенной. Это достигается использованием при решении (11) модифицированного разложе-

ния Холесского вида [5]: $K + E = LDL^T$, где E – неотрицательная диагональная матрица, такая, что $E = 0$, если K положительно определенная, L – единичная нижняя треугольная матрица, D – диагональная матрица со строго положительными элементами.

В качестве функции выигрыша для расчета шага используется логарифмическая барьерная функция, чей минимум совпадает с решением задачи (3)-(5):

$$\phi(u, v, x) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\bar{y}_i - y_i(x)}{\sigma_i} - u_i + v_i \right) + \gamma \sum_{i=1}^m (u_i + v_i) - \mu \sum_{i=1}^m (\ln u_i + \ln v_i). \quad (16)$$

Результаты статистических испытаний. Исследование сходимости представленных выше алгоритмов выполнено на шести тестовых ЭЭС с различными расчетными условиями. Использовались тестовые схемы 14-, 30-, 118-, 300- и 444-узловых ЭЭС, а так же схема из 887 узлов, полученная объединением двух 444-узловых ЭЭС. Параметры сети и установившегося режима каждой ЭЭС находятся в на сайте Отдела энергетики ИСЭиЭПС КНЦ УрО РАН по адресу http://energy.komisc.ru/dev/test_cases. Характеристики измерительных систем, сформированных для шести ЭЭС, приведены в таблице. Каждому измеряемому параметру случайным образом назначена дисперсия ошибки σ_i^2 из диапазона $\sigma \in [0,5\sigma_u, 6,5\sigma_u]$, где σ_u устанавливалась в зависимости от класса напряжения сети $\sigma_u = U_{ном} / 200$.

Характеристики тестовых схем

Схема ЭЭС	Узлов/ ветвей	Количество измерений				Избы- точность, <i>m/n</i>
		инъекций <i>P/Q</i>	перетоков <i>P/Q</i>	напряжений <i>U</i>	всего	
IEEE-14	14/20	6/6	20/20	5	57	2,04
IEEE-30	30/41	13/13	40/40	15	121	2,05
IEEE-118	118/179	29/28	214/186	50	507	2,16
IEEE-300	300/411	119/113	400/400	50	1112	1,86
TVA-444	444/560	148/139	696/704	300	1987	2,24
test-887	887/1120	421/376	1000/1000	500	3297	1,86

Для получения статистически значимых результатов для каждой ЭЭС было сформирован набор из 750 случайных реализаций измерений. Порядок формирования одной реализации следующий. К значениям измеряемых параметров режима добавлялись случайные ошибки, распределенные по нормальному закону $\xi_i \rightarrow N(0, \sigma_i^2)$. Случайным образом из m измерений выбирались z измерений, к которым добавлялись слу-

чайные большие величины из диапазона $\pm [10\sigma_i, 50\sigma_i]$, имитирующие грубые ошибки. В зависимости от числа z недостоверных измерений весь набор из 750 ситуаций разбивается на 3 равные группы: с 0%, 8% и 16% недостоверных измерений от общего числа имеющихся измерений. Ситуации, когда 16% измерений содержат большие грубые ошибки, далеки от реальности. Но именно на таких ситуациях можно получить сильно нелинейные задачи, оптимальные решения которых могут лежать за пределами области допустимых режимов вследствие нарушения условия устойчивости оценки Хьюбера.

Результаты тестирования алгоритмов внутренних точек и их сопоставления с методом, разработанным ранее в [2], показали следующее:

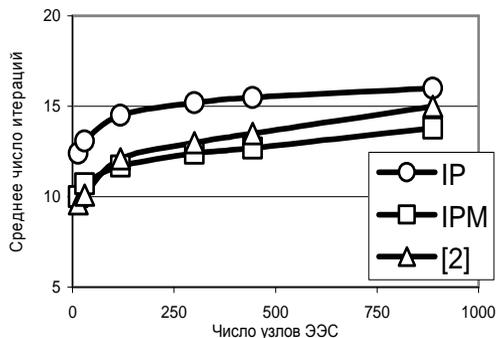
1. На всем множестве тестовых задач алгоритм ИРМ требует на 20% итераций меньше, чем алгоритм ИР.

2. При отсутствии грубых ошибок в измерениях скорость сходимости ИРМ сопоставима со скоростью сходимости алгоритма [2] (рис.1, а). Учитывая, что трудоемкость одной итерации в [2] заметно ниже, чем у ИРМ, преимущества алгоритмов внутренних точек здесь не очевидны.

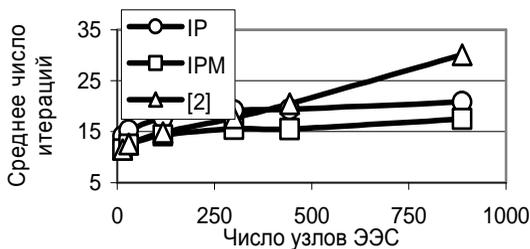
3. При наличии грубых ошибок в измерениях число итераций сходимости алгоритма [2] с увеличением размерности ЭЭС линейно возрастает (рис.1, б). Скорость сходимости алгоритмов ИР и ИРМ практически не меняется, и на больших схемах они оказываются эффективнее алгоритма [2].

4. Очевидное преимущество алгоритмов ИР и ИРМ имеет место при задании малых значений параметра функции Хьюбера γ (рис.2). Теоретически, когда уровень дисперсий нормальных ошибок измерений известен, значение γ рекомендуется выбирать из интервала $[1, 2]$. При $\gamma \rightarrow \infty$ свойства оценки Хьюбера приближаются к свойствам неробастной оценки наименьших квадратов. При $\gamma \rightarrow 0$ оценка Хьюбера приобретает свойства оценки наименьших модулей. Как правило, на практике значения дисперсий ошибок измерений не известны. Если реальный уровень шума измерений выше, чем предполагаемый, задание $\gamma = 1$ фактически соответствует получению оценки Хьюбера с $\gamma < 1$.

5. На сходимость алгоритмов внутренних точек практически не влияет состав недостоверных измерений. Графики на рис.3 показывают количество задач тестового набора ситуаций 444-узловой ЭЭС, решенных тем или иным алгоритмом за число итераций меньше, чем указано по оси абсцисс. В 95% случаев отклонение числа итераций от среднего составляет ± 2 итерации. Скорость сходимости алгоритма [2] менее стабильна.



a



b

Рис.1 – Соотношение скорости сходимости алгоритмов в зависимости от размерности ЭЭС для $\gamma = 1$ при отсутствии грубых ошибок (*a*) и наличии 8% грубых ошибок (*b*)

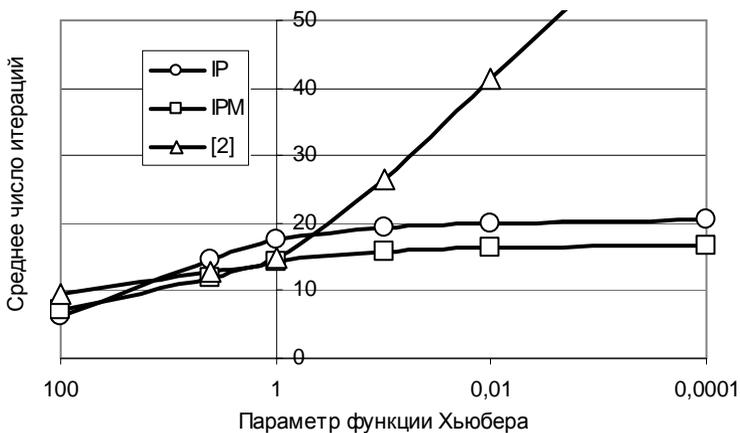


Рис.2 – Влияние параметра γ на скорость сходимости алгоритмов при оценивании состояния 118-узловой ЭЭС с 8% грубых ошибок

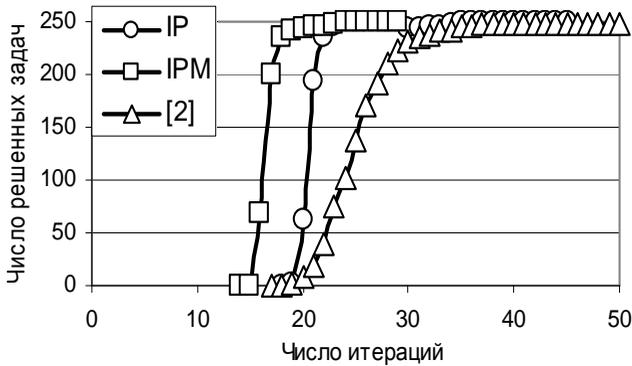


Рис.3 – Сходимость алгоритмов при оценивании состояния 444-узловой ЭЭС с 16% грубых ошибок и $\gamma=1$

Результаты численного исследования представленных алгоритмов внутренних точек на множестве случайно сгенерированных задач оценивания состояния ЭЭС показали, что они способны составить реальную конкуренцию алгоритму, предложенному в [2]. Дальнейшие исследования связаны с развитием алгоритмов в плане учета ограничений в форме равенств, необходимых для адекватного моделирования нулевых инъекций транзитных узлов, и функциональных ограничений в форме неравенств, моделирующих допустимые пределы на параметры режима.

- 1.Хохлов М.В. Пороговые свойства робастного оценивания состояния электроэнергетических систем // Электричество. – 2010. – №4. – С. 2-12.
- 2.Хохлов М.В. Модифицированный метод Ньютона для задачи оценивания состояния ЭЭС по неквадратичным критериям // Известия вузов. Проблемы энергетики. – 2008. – №11-12/I. – С.149-158.
- 3.Чупров В.С., Хохлов М.В. Оценивание состояния ЭЭС по неквадратичным критериям как задача нелинейного программирования // Энергосистема: управление, конкуренция, образование: Сб. докладов III международ. науч.-практ. конф. В 2 т. – Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2008. Т.1. – С.434-436.
- 4.Nocedal J., Wright S.J. Numerical Optimization. – Springer, 2006. – 664 p.
- 5.Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация: Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 509 с.

Получено 04.11.2011